

---

# réfrigération passive<sup>1</sup> par rayonnement

---

## (1) Introduction

«Depuis un temps immémorial, on fait au Bengale de la glace par un procédé fondé sur le rayonnement nocturne. On place des vases de terre peu profonds, plein d'eau, sur des couches de cannes à sucre ou de tiges de maïs non comprimées; lorsque, pendant la nuit, le ciel a été pur, l'air calme, et que la température de l'atmosphère s'est abaissée au-dessous de 10°, on trouve le matin l'eau congelée.»

*Traité de la chaleur considérée dans ses applications par E.Péclet, 3<sup>e</sup> tome, 1861.*

La production de froid est et restera une préoccupation majeure des hommes pour la conservation des denrées périssables, ou tout simplement pour le rafraîchissement des locaux. Cependant, la production de froid représente en France une part non négligeable de la consommation électrique (environ 32% de la consommation électrique d'un foyer — source ADEME). Quant aux pays en voie de développement, les possibilités de production de froid ne sont souvent pas basées sur des énergies renouvelables, peu chères, et souvent abondantes, comme par exemple l'est le soleil en Afrique.

C'est notamment pour trouver des alternatives pour ces pays chauds, que Félix TROMBE (1906-1985), directeur de recherche au CNRS a mis au point un dispositif de refroidissement passif, basé sur le rayonnement de la matière; et ce, avec des matériaux très bon marché.

Nous allons ici explorer un peu cette méthode de réfrigération en adoptant la démarche suivante :

- modélisation du phénomène
- étude de la température limite
- forme du réfrigérateur
- emboîtement successif de plusieurs réfrigérateurs de ce type
- étude de la plaque rayonnante
- résultats expérimentaux

## (2) Lois physiques intervenant

**(2.1) TRANSFERT THERMIQUE PAR CONDUCTION/CONVECTION :** le flux de chaleur observé entre deux solides (ou entre un solide et un fluide) est proportionnel à la surface de contact entre les deux solides (ou entre le solide et le fluide) et à la différence de température des deux corps. Ce flux de chaleur est toujours dirigé de la source chaude vers la source froide. On peut l'écrire :

$$\phi = CS\Delta T, \tag{1}$$

où  $S$  est la surface d'échange,  $\Delta T$  la différence de température et  $C$  le coefficient de proportionnalité appelé *conductance*.

**(2.2) LOI DE LA RÉFLEXION DE DESCARTES :** un rayon lumineux faisant un angle  $i$  avec la normale à la surface sur laquelle il incide est réfléchi avec ce même angle, dans la direction symétrique à cette normale.

**(2.3) TRANSFERT THERMIQUE PAR RAYONNEMENT :** un corps est considéré comme un corps noir pour une longueur d'onde donnée s'il absorbe tout ce rayonnement et le ré-émet sans rien en retenir. Si un corps est considéré comme un corps noir, alors il rayonne une énergie proportionnelle à la quatrième puissance de sa température — absolue — et à sa surface. Le coefficient de proportionnalité est la constante de Stéfan et vaut environ  $5,67.10^{-8}$  uSI.

La majorité de ce rayonnement s'effectue dans une bande de fréquence bien précise, déterminée par la loi de déplacement de Wien : la longueur d'onde du maximum d'émission (en  $\mu m$ ) multipliée par la température — absolue — est une constante (qui vaut approximativement  $2898 \mu m.T$ ).

---

<sup>1</sup>Système passif : «Agencement de matériaux — sans pièces mobiles — permettant de profiter des transferts d'énergie avec l'extérieur». Par exemple, la disposition de vitrages exposés plein Sud, est un moyen de chauffage passif.

REMARQUE. Aux températures auxquelles se trouvent les corps terrestres, le rayonnement est majoritairement infrarouge.

(2.4) La thermodynamique permet de prévoir l'évolution de la température d'un corps en fonction de sa variation d'énergie, en considérant ici la masse et la pression constantes, on a

$$dU = S e \rho C_p dT, \quad (2)$$

où  $S$  est la surface,  $e$  l'épaisseur,  $\rho$  la masse volumique et  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante d'une plaque rectangulaire. ( $U$  représente l'énergie interne de cette plaque)

REMARQUE. On sera plus tard amené à intégrer — ou du moins virtuellement — cette relation, ce qui peut se faire simplement en considérant toutes les grandeurs définies ci-dessus comme constantes (elles le sont toutes quasiment par rapport à la température, exceptée  $C_p$ , mais l'on fera comme si).

### (3) Modélisation du phénomène

(3.1) Tout corps considéré comme un corps noir rayonne de l'énergie proportionnelle à la puissance quatrième de sa température — absolue. Ce rayonnement va provoquer une perte d'énergie et donc une chute de la température du corps. Seulement, pour que la chute de température soit notable, il faut que tous les apports thermiques externes soient minimisés, bref que le corps noir soit isolé le plus possible des corps alentours.

La forme générale du réfrigérateur se présentera ainsi : une cuvette isolée au fond de laquelle on dispose le corps noir (sous forme de plaque).

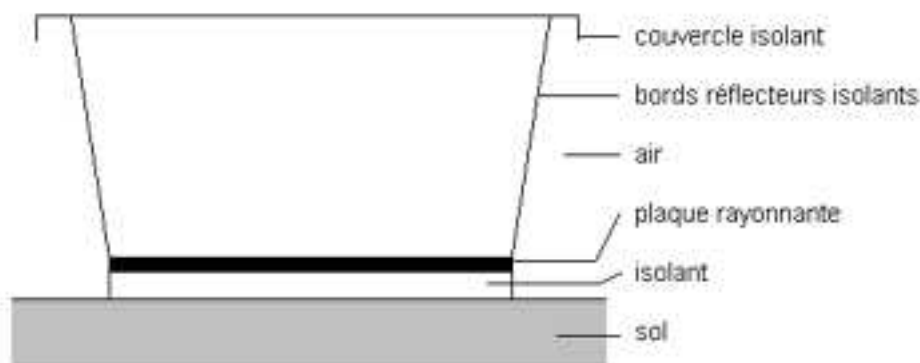


FIGURE 1 - Vue générale du réfrigérateur

(3.2) Pour simplifier les calculs on supposera que l'angle entre les rebords et la verticale est négligeable.

D'après la loi de Stéfán (loi de rayonnement du corps noir), la plaque rayonnante va perdre de l'énergie et donc sa température va chuter. Les apports extérieurs seront les suivants : conduction due au sol, convection due à l'air, et bien évidemment tous les flux entrants (comme le flux solaire, etc...).

On simplifie encore grandement les choses en supposant que le réceptacle est posé de façon à ce que la conduction due au sol ne soit en réalité qu'une convection (en le posant sur une table par exemple). Par ailleurs, le seul flux entrant — autre que la convection/conduction — sera le flux solaire.

Comme annoncé plus haut, la variation élémentaire d'énergie de la plaque est donnée par

$$dU = S e \rho C_p dT, \quad (3)$$

qui est aussi égale à la somme des flux entrants et sortants pendant l'instant élémentaire  $dt$  :

– le flux solaire varie au cours de la journée, mais ici on ne l'étudiera que dans un cas constant : en pleine nuit.

- le flux de convection est proportionnel à la différence de température entre l'air et l'intérieur du réfrigérateur. Le coefficient de proportionnalité est de la forme  $kC$ , où  $C$  est la conductance de la paroi et  $k$  un facteur de forme à mesurer expérimentalement.
- le flux rayonné est donné par la loi de Stefan. ATTENTION : il s'agit d'un flux sortant, il faudra donc le compter négativement.

D'où  $dU = Se\rho C_p dT = \phi(\text{soleil})dt + kC(T(\text{air}) - T)dt - \sigma T^4 dt$ , ce qui se solde par une équation différentielle non linéaire, en divisant pas  $dt$  — et par  $S$  également : la température, et son évolution, ne dépendent pas de la taille du réfrigérateur.

$$e \rho C_p \frac{dT}{dt} + \sigma T^4 + kCT = \phi(\text{soleil}) + kCT(\text{air}) \quad (4)$$

#### (4) Evolution de la température

On va ici se contenter de tracer la courbe de l'évolution de la température dans le réfrigérateur grâce à l'équation différentielle trouvée à la partie précédente. Pour cela, nous allons discrétiser cette équation différentielle : en supposant connue la température à un instant donné, on calculera la température en un instant assez voisin en approximant la courbe à sa tangente (en développant au premier ordre), pourvu qu'on veuille bien admettre une erreur aussi grande que la valeur voisine est loin. Et en exploitant l'équation différentielle on peut remplacer la dérivée de  $T(t)$  par une expression qui ne dépend que de  $T(t)$ .

On obtient au final une relation de récurrence (non linéaire) qui permet en outre de calculer une famille de points qui permettront d'approcher la courbe réelle.

On note par ailleurs, en évaluant l'équation différentielle à l'instant initial, que la dérivée à cette instant est négative : dès le départ le réfrigérateur refroidit, on doit donc s'attendre à une courbe décroissante.

Une courbe obtenue pour certaines valeurs de constantes :

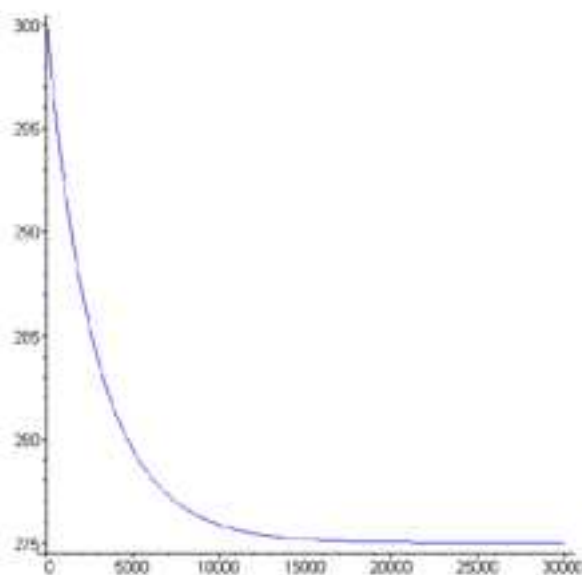


FIGURE 2 - Une évolution possible de la température dans le réfrigérateur

#### (5) Température du réfrigérateur à l'équilibre

(5.1) A l'équilibre — la température ne varie plus — on a

$$\sigma T^4 + kCT = \phi(\text{soleil}) + kCT(\text{air}). \quad (5)$$

Et la température limite obtenue est donc racine de ce polynôme. Etudions la température limite en cas d'absence de flux solaire (la nuit) : la seule condition qui déterminera la température dans le réfrigérateur est la température de l'air — pour un réfrigérateur donné, donc pour des valeurs de  $k$  et  $C$  données.

Appelons  $x$  cette température extérieure et cherchons  $T$  vérifiant :

$$\sigma T(x)^4 + kCT(x) - kCx = 0 \quad (6)$$

La résolution complète de cette équation n'est pas simple. Cherchons plutôt à en tirer des informations importantes. Notons tout de suite que  $T$  est définie de  $\mathbf{R}^+$  dans  $\mathbf{R}^+$ .

**(5.2) LA FONCTION  $T$  EST CROISSANTE :** en effet en dérivant le polynôme on obtient

$$T' = \frac{kC}{kC + 4\sigma T^3}, \quad (7)$$

où toutes les grandeurs sont positives, ce qui garantit bien que  $T$  est croissante.

REMARQUE. Heureusement que  $T$  est croissante : si cela n'avait pas été le cas, il existerait des températures extérieures pour lesquelles quelqu'un se trouvant en Afrique pourrait refroidir plus bas que quelqu'un en Sibérie, et ce fait est physiquement faux. Si tel n'était encore pas le cas, celui qui se trouve en Sibérie pourrait chauffer son réfrigérateur jusqu'à la température initiale de celui qui se trouve en Afrique — ils partiraient ainsi de la même température initiale —, et comme il est fait moins chaud en Sibérie, son réfrigérateur se serait moins réchauffé — à cause de l'air ambiant — et donc il serait forcément plus froid que celui en Afrique : la fonction  $T$  se devait d'être croissante.

Notons par ailleurs que  $T(0) = 0$ . En effet le polynôme nous donne cette unique racine réelle positive si l'on fait  $x = 0$  ; ou alors, en partant d'une température extérieure de  $\theta$  K, on ne peut pas refroidir au-delà donc  $T(0) = 0$ . ATTENTION : ceci implique que l'on admet que le réfrigérateur refroidit bien, chose que nous allons prouver dans quelques instants, et dont la preuve repose sur ce résultat — on préférera, pour une fois, le point de vue mathématique.

**(5.3) LA FONCTION  $T$  EST CONCAVE :** en effet en dérivant deux fois le polynôme, on peut exprimer  $T''$  en fonction de  $T'$  et  $T'$  en fonction de  $T$  (bref,  $T''$  en fonction de  $T$ ), on a

$$T'' = -\frac{12\sigma T^2(kC)^2}{(kC + 4\sigma T^3)^3}, \quad (8)$$

qui est évidemment négative pour toute température,  $T$  est donc concave.

**(5.4) CONSÉQUENCE 1 :** la fonction  $T$  est sous toutes ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation  $y = x$  ; bref, la température atteinte dans le réfrigérateur est inférieure à celle dehors, le réfrigérateur refroidit !

**(5.5) CONSÉQUENCE 2 :** en considérant la fonction  $\delta = x - T(x)$  qui est l'écart (positif) entre les températures intérieure et extérieure, et en la dérivant, on montre qu'elle est croissante — sa dérivée

$$[x - T(x)]' = 4\frac{\sigma}{kC}T^3T', \quad (9)$$

étant positive. Autrement dit, l'écart de température est d'autant plus important que la température extérieure est élevée.

REMARQUE. Cela veut bien dire qu'un Africain refroidit plus qu'un Sibérien, en terme d'écart de températures, mais la croissance de la fonction  $T$  vient garantir que c'est bien le Sibérien qui aura le plus froid.

**(5.6) ESSAI DE RECONSTITUTION DE LA FONCTION  $T$  :** on remarque que grâce au polynôme, et à la condition  $T(0) = 0$ , on peut essayer de représenter la fonction  $T$  grâce à son développement de Taylor.

On peut montrer par récurrence que la dérivée n<sup>e</sup> de  $T$  est fonction de  $T$  uniquement (d'une façon complexe certes). Et donc théoriquement, disposant de toutes ces dérivées successives évaluées en 0, on pourrait représenter  $T$  sous forme d'une série entière (sur un certain domaine à déterminer).

**(5.7) ESSAYONS AUTRE CHOSE :** voyons si dans notre polynôme nous ne pouvons pas négliger certains termes pour obtenir une courbe approchée. Le terme en  $T^4$  représente le rayonnement de la plaque,

le supprimer reviendrait à ne plus refroidir (on obtiendrait  $T(x) = x$ ). Supprimer le terme en  $x$  revient à choisir la température extérieure nulle, or nous voulons une courbe approchée pour toute température.

Le terme en  $T$  est «négligeable», il provient du flux de chaleur entre l'intérieur et l'extérieur (terme en  $T(\text{air}) - T$  ou ici  $x - T(x)$ ), et si on le néglige alors on considère que la chaleur ne peut que rentrer dans le réceptacle et donc la température obtenue dans ce cas sera plus chaude que celle prévue par le polynôme initial. C'est pour cela que ce terme est «négligeable» : c'est qu'il nous donnera une majoration de la température atteinte (et non pas une minoration qui n'a aucun intérêt : on veut savoir au moins quelle température on atteindra et non pas celles que l'on ne peut pas atteindre).

Un tel cas nous ramène à un polynôme résoluble, dont la racine (qui nous intéresse) est

$$T(x) = \sqrt[4]{\frac{kC}{\sigma} x} \quad (10)$$

Cette approximation est d'autant plus vraie que la température est grande, comme le montre le graphique

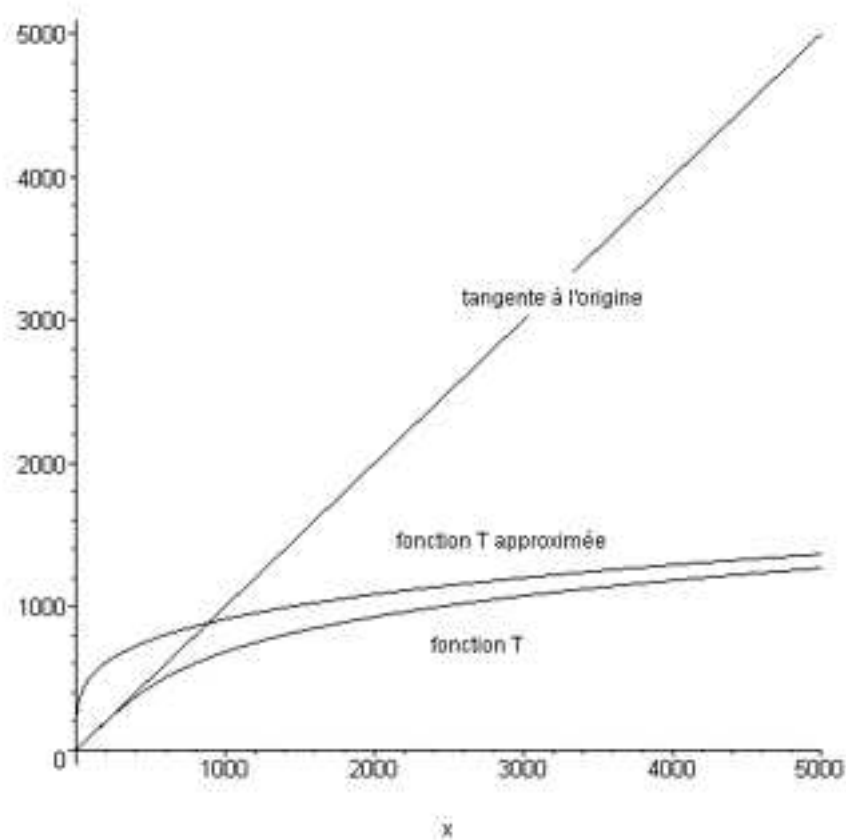


FIGURE 3 - Allure de la fonction  $T$ , de sa tangente à l'origine et de son approximation

On améliore la précision en écrivant

$$T(x) = \sqrt[4]{\frac{kC}{\sigma} x} + \delta(x), \quad (11)$$

où  $\delta$  est l'erreur commise, supposée petite.

On remplace ainsi dans le polynôme, et en développant au premier ordre on affine le résultat à

$$T(x) = \sqrt[4]{\frac{kC}{\sigma} x} \left( 1 - \frac{\sqrt[4]{\frac{kC}{\sigma} x}}{4x + \sqrt[4]{\frac{kC}{\sigma} x}} \right), \quad (12)$$

opération qui peut être répétée plusieurs fois. On peut calculer la relation de récurrence qui lie les approximations successives lorsque l'on passe de l'ordre  $n$  à l'ordre  $n+1$  (à compter que l'ordre  $n$  indique

l'approximation dans laquelle figurent  $n$  termes sommés). En s'arrêtant à l'ordre 3, l'erreur commise est inférieure à 0,25, on approximerait donc volontiers la fonction  $T$  à cette nouvelle fonction (à l'ordre 4, la précision est de  $10^{-4}$ ). Ci-dessous un aperçu de l'approximation à l'ordre 2 (l'ordre 3 conduit à un résultat indiscernable de la vraie fonction) :

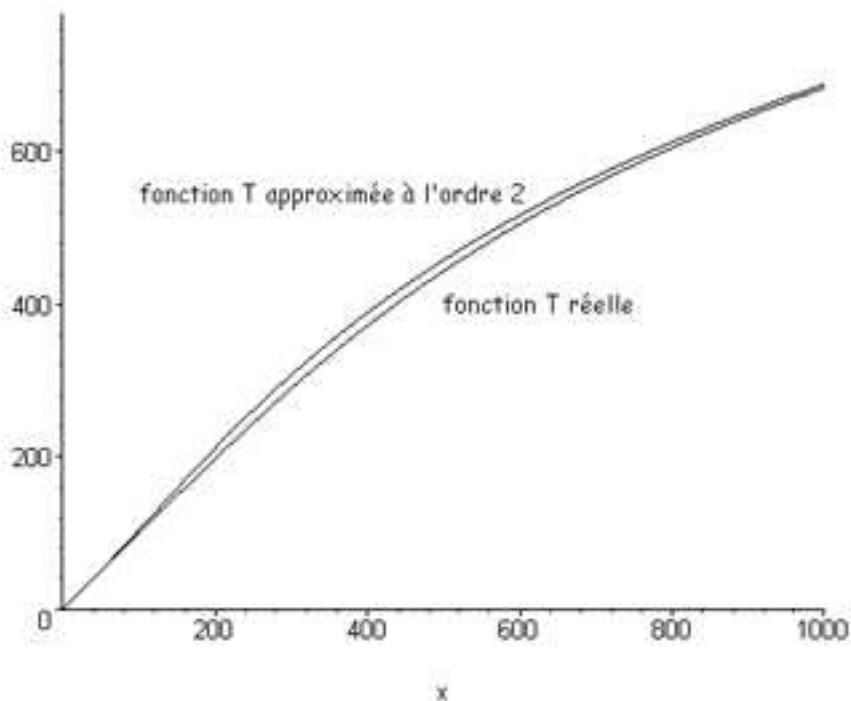


FIGURE 4 - Allure de la fonction  $T$  et de son approximation à l'ordre 2

Le résultat remarquable est le suivant : l'approximation faite est d'autant plus vraie que  $x$  est grand (elle est vraie pour l'infini), mais on vérifie trivialement qu'elle est vraie en 0, donc au moins en son voisinage (par continuité). Ainsi, l'approximation sera vraie en 0 et en l'infini, ce qui signifie que l'erreur maximale est atteinte en un point (dépendant de l'ordre a priori) qui ne peut cotoyer l'infini ni la valeur 0. Et ceci est vérifié facilement par le tracé de la courbe qui donne l'erreur entre la fonction  $T$  et son approximation à l'ordre  $n$  : pratiquement, on constate qu'elle présente un maximum qu'elle prend pour une valeur finie non nulle. Il est ainsi possible de choisir correctement l'ordre auquel il faut développer pour obtenir une erreur arbitrairement petite.

REMARQUE. Le tracé montre à peu près clairement que la fonction est croissante et concave.

REMARQUE. Rien ne vient garantir — sauf au vu de la courbe — que les approximations successives tendent effectivement vers la solution de notre problème. Deux choses : d'une part, en cherchant la relation de récurrence qui lie l'ordre  $n$  à l'ordre  $n+1$ , et en cherchant les limites potentielles, on s'aperçoit que la seule limite possible est la fonction  $T$  cherchée (solution du polynôme); par ailleurs, le fait que le maximum de l'erreur se fasse en un point (qui dépend de l'ordre a priori) permet d'envisager la convergence en ne considérant que ce point si sa dépendance n'est pas liée à l'ordre (on aura ainsi une convergence uniforme). Reste donc à prouver que cette suite a une limite ...

## (6) Forme du réfrigérateur

(6.1) Notre réfrigérateur refroidit. Au niveau de la plaque l'émission de rayonnement dans le demi-espace fait chuter la température. Or, cette émission se fait dans toutes les directions; et il est clair qu'un rayon émis latéralement «rebondira» sans cesse sur les parois verticales, à moins que celles-ci ne soient inclinées. Inclinons-les. Le refroidissement est théoriquement optimisé. Incidemment, l'ouverture supplémentaire créée par cette inclinaison permet beaucoup trop d'entrée dans le réceptacle. Il faut trouver un compromis ...

(6.2) PREMIÈRE CONTRAINTES : maximiser le rayonnement sortant en imposant un angle aux rebords (par rapport à la verticale). Tout rayon émis latéralement doit être réémis vers l'extérieur en au plus un «rebond». Ce cas est le pire des cas en ce qui concerne l'émission au niveau de la plaque. Donnons

également un nom au rapport de la hauteur des côtés sur la largeur du réceptacle,  $\alpha$ . Une condition suffisante est  $\alpha \cos\theta < \tan 2\theta$

**(6.3) SECONDE CONTRAINTE** : elle concerne l'entrée de rayons lumineux parasites. D'après le schéma ci-dessous, on s'aperçoit que les rayons ayant une direction privilégiée seront réémis vers l'extérieur : cette direction est telle que le coefficient directeur de la droite portant le rayon est inférieur à celui de la perpendiculaire au rebord passant par le sommet du rebord opposé.

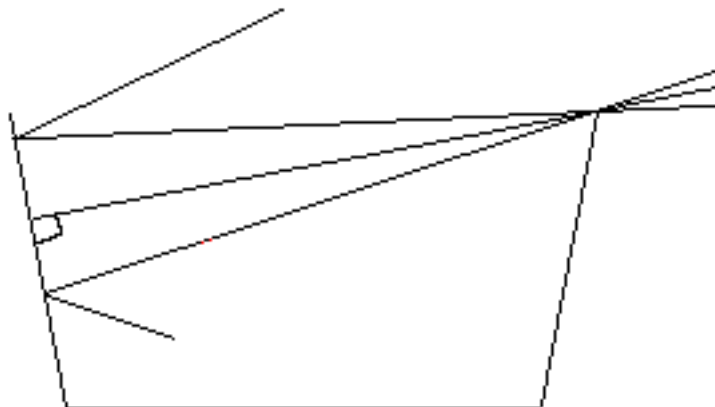


FIGURE 5 - Devenir des rayons entrants en fonction de leurs inclinaisons

On obtient une seconde relation du type  $f(\alpha, \theta) > 0$  (qu'il est, ici, inutile de mentionner vu la longueur)

**(6.4)** Bref, ces deux contraintes mises ensemble imposent aux paramètres recherchés un «ensemble de définition» beaucoup plus restreint :

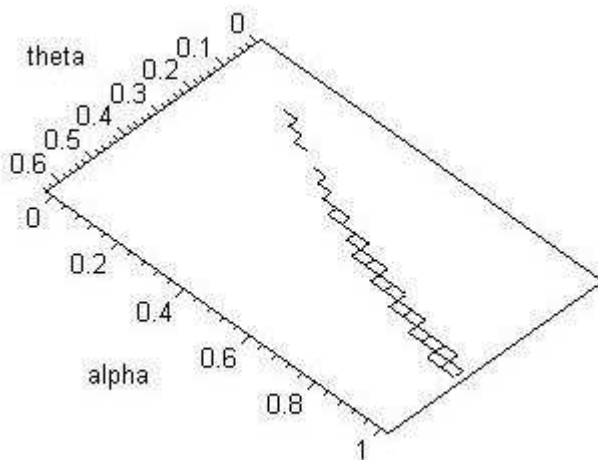


FIGURE 6 - Ensemble de définition des paramètres  $\alpha$  et  $\theta$

Par des arguments de géométrie, on a trouvé un espace dans lequel les couples sont naturellement privilégiés par rapport aux autres. Cherchons maintenant, par des arguments de flux, des contraintes qui vont permettre de déterminer quel(s) couple(s) choisir.

**(6.5)** Les contraintes sont les suivantes (la donnée des fonctions n'est d'aucune utilité) :

- Appelons fonction  $L$  la fonction qui au couple  $(\alpha, \theta)$  associe la surface d'ouverture du réceptacle. Cette fonction est naturellement à minimiser pour éviter les entrées de lumière.
- Appelons fonction  $L'$  la fonction qui au couple  $(\alpha, \theta)$  associe la surface comprise entre la plaque et l'intersection du rebord avec sa normale (cf FIGURE 5). Tout rayon tombant dans cette zone sera réfléchi vers l'intérieur, il faut minimiser cette fonction.

- Appelons fonction  $a$  la fonction qui au couple  $(\alpha, \theta)$  associe le coefficient directeur des rayons extrêmes — ceux frôlant les bords et tombant sur la plaque au côté opposé. C'est en quelque sorte une mesure de l'angle solide d'ouverture du réceptacle sur le ciel; il faut minimiser cette ouverture et donc maximiser le coefficient directeur de la droite (et par conséquent la fonction  $a$ ).

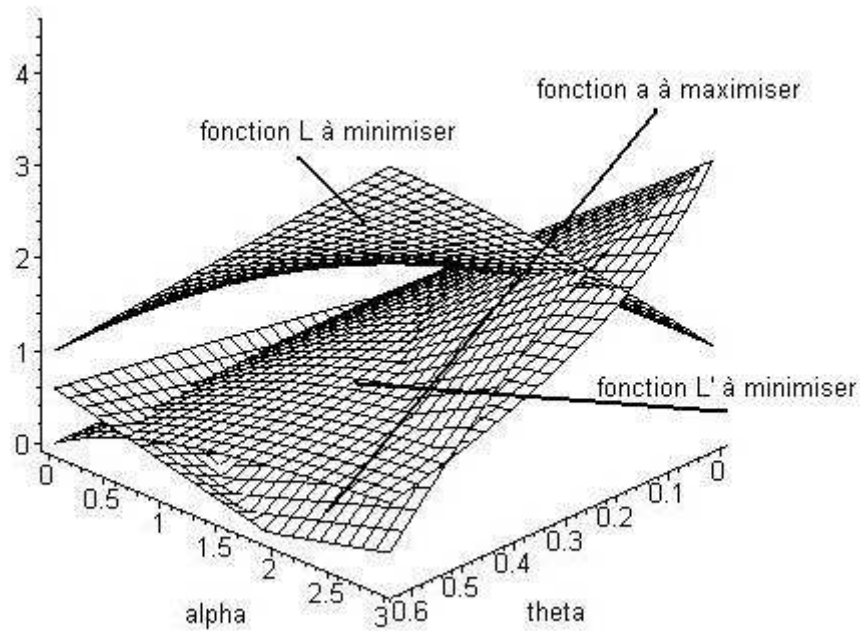


FIGURE 7 - Contraintes à minimiser ou maximiser

**(6.6)** Une mesure possible du «bon choix» : pour mesurer quel couple est le meilleur, nous choisirons de mesurer l'erreur commise en sommant les écarts (en valeur absolue) des fonctions avec une origine. Concernant les deux fonctions à minimiser, on choisira 0 comme origine et 5 par exemple pour la fonction  $a$  (ou tout autre nombre pourvu qu'il soit un majorant de cette fonction sur l'ensemble de définition).

En restreignant cette mesure du «bon choix» à l'ensemble défini plus haut, on obtient une courbe qui passe par un minimum qui correspond au couple recherché. Dépendant de deux paramètres, nous allons résoudre le problème en tournant le graphique autour des axes de coordonnées, de façon à projeter la courbe; afin de ne voir que séparément sa dépendance en  $\theta$  et  $\alpha$ .

On retrouve les valeurs les plus naturelles qu'il convient de donner au réceptacle qui sont :  $\alpha = 0,75$  et  $\theta = 17^\circ$ .



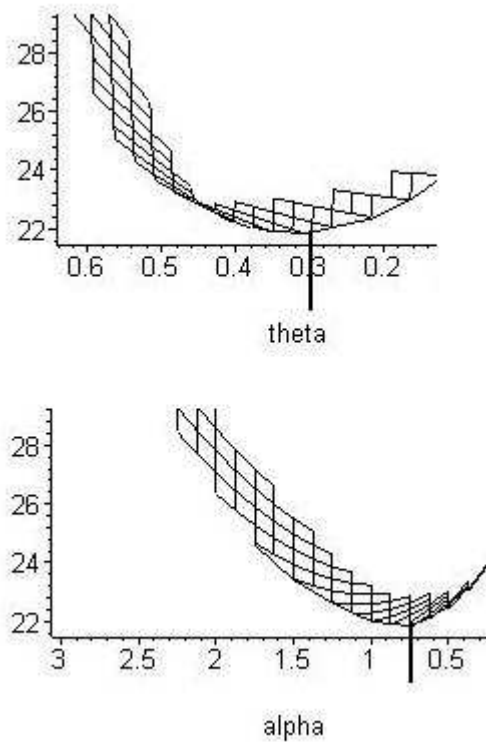


FIGURE 8 - Valeurs optimales ( $\theta$  est en radians)

### (7) Le réfrigérateur gigogne

(7.1) La température limite ne dépendant que de la température de l'air extérieur, Félix TROMBE eut l'idée de construire plusieurs modules réfrigérants de ce type de taille décroissante, de façon à les emboîter les uns dans les autres.

La difficulté ici est de calculer la température limite dans une boîte pour connaître — puisque c'est la même — la température de l'air extérieur au réfrigérateur plus petit inclus dans cette boîte. En effet, bien que nous ayons étudié cette fonction précédemment, nous ne l'avons toujours pas exactement. Nous pouvons certes utiliser notre approximation à l'ordre 3 qui était assez juste. Mais nous allons employer une méthode plus rapide, en supposant que toutes les températures seront proches de  $250\text{ K}$  par exemple (avec  $300\text{ K}$  à l'extérieur). On développe au premier ordre autour de cette température et la résolution est aisée — mais grossière.

Suivons l'évolution de la température à l'équilibre au fur et à mesure que l'on progresse dans les boîtes :

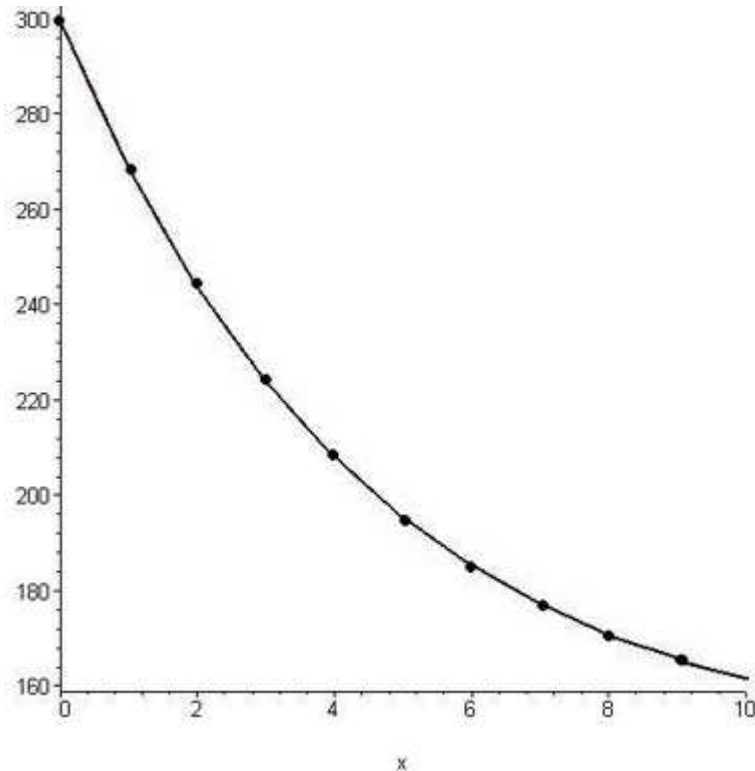


FIGURE 9 - Evolution de la température lors de la progression dans les boîtes

(7.2) En 5 boîtes on obtient le résultat spectaculaire de  $100^{\circ}\text{C}$  de différence! Alors que pratiquement, Félix TROMBE avait trouvé  $35^{\circ}\text{C}$ . La différence énorme est bien entendu due à la méthode de résolution très grossière.

Mais refaisant les calculs des températures de proche en proche, on s'aperçoit que la chute n'est plus que de  $55^{\circ}\text{C}$ , cette fois-ci due à une valeur d'isolation difficilement réalisable.

### (8) Structure de la plaque rayonnante

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré une plaque dont l'émissivité était de 1. Il ne s'agit pas de refaire les calculs avec une émissivité plus réelle, mais de chercher à comprendre comment se rapprocher d'une plaque ayant cette valeur d'émissivité. Il est dit de la plaque rayonnante qu'elle est «une simple feuille d'aluminium recouverte, sur une épaisseur bien déterminée, d'une couche oxydée».

Comme cité en introduction, l'eau possède également un pouvoir de rayonnement intense. Si nous remplaçons la plaque d'aluminium oxydée par une cuvette en aluminium remplie d'eau, le fonctionnement resterait inchangé.

(8.1) L'épaisseur d'eau ne doit pas être trop grande : en effet, ce qui n'est pas absorbé est proportionnel à l'exponentielle de l'opposé de la distance parcourue dans le milieu dispersif. Une équation de la forme

$$Ce^{-\frac{2e}{\tau}} \quad (13)$$

est à maximiser, puisque c'est ce qui n'est pas absorbé. Le maximum est atteint lorsque  $e = 0$  et c'est évident que l'eau n'absorbe rien lorsqu'il n'y a pas d'eau!

(8.2) L'épaisseur de l'eau ne doit pas être trop faible : en effet une couche trop faible ne rayonnera pas assez. Raisonnons grossièrement :

Chaque couche d'eau épaisse d'une molécule rayonne de l'énergie, appelons  $r$  ce rayonnement, et  $n$  le nombre de molécules par unité de hauteur. A une profondeur  $h$  de la surface de l'eau, la couche d'épaisseur  $dh$  qui contient  $n \cdot dh$  molécules en hauteur rayonne une quantité  $rndh$ .

Ce rayonnement sera bien entendu amorti sur toute la hauteur  $h$ , et le rayonnement de cette couche

infinitésimale à la surface de l'eau sera de la forme

$$rnCe^{-\frac{h}{\tau}} dh, \quad (14)$$

ce qui, intégré sur toute la hauteur de la lame d'eau (à condition de considérer  $n$  et  $r$  indépendants de  $h$ ) donne

$$rn\tau C(1 - e^{-\frac{e}{\tau}}) \quad (15)$$

qui est maximale pour  $e = \infty$ .

**(8.3)** L'épaisseur optimale doit l'être pour les deux contraintes. Faire la somme des écarts en valeur absolue ne mène à rien puisque les deux valeurs proposées sont 0 et  $\infty$ . Etant donné que les deux fonctions tendent vers 0 en ces deux «points», on va préférer maximiser le produit des deux fonctions.

Le tracé de cette courbe montre clairement qu'il existe un maximum non atteint en 0 et  $\infty$  (en prenant par exemple toutes les constantes égales à 1).

Cependant, le fait qu'il existe un maximum de rayonnement nous conforte bien dans l'idée qu'il existe une épaisseur optimale : mais l'accès aux constantes introduites est trop difficile, et nous nous contenterons d'affirmer l'existence d'une épaisseur optimale, qui, de toute manière n'aurait pas pu être vérifiée en pratique.

Si maintenant, on est prêt à admettre que l'aluminium couvert d'une couche d'aluminium oxydé se comporte comme s'est comportée l'eau, alors les résultats sont transposables et l'on peut affirmer l'existence d'une épaisseur optimale.

## (9) Résultats expérimentaux

Un aperçu du dispositif expérimental :



FIGURE 10 - Module réfrigérant simple

REMARQUE. Il s'agit d'une boîte en bois (contreplaqué) isolée thermiquement avec une couche de polystyrène. L'intérieur est couvert de plaques d'aluminium, et le couvercle est en polyéthylène.

La plaque rayonnante est une plaque d'aluminium recouverte d'une couche de noir de fumée (c'est un corps noir pour les infrarouges, mais aussi pour les rayons lumineux visibles — il est noir — ce qui provoque l'absorption de ces derniers et donc un réchauffement qui annihile tout refroidissement dans la journée — et chauffe même!). Félix TROMBE avait utilisé de l'aluminium oxydé car c'était un corps noir pour les infrarouges, mais non pour la lumière visible (un «corps noir sélectif», qui lui permettait d'utiliser son réfrigérateur de nuit comme de jour, cette plaque étant «indifférente» aux rayons lumineux visibles).

**(9.1)** La théorie prévoit une température limite en l'absence de nuages, de pluie, de neige, etc. ...

On ne mentionnera ici que les résultats expérimentaux effectués dans les conditions de la théorie, c'est-à-dire, lorsque le ciel a été suffisamment dégagé, le vent faible.

On remarquera aussi les effets de masque créés par les bâtiments, les arbres, etc. ... qui rayonnent à leurs tours dans le réceptacle, abaissant le rendement admissible.

Ecart	T(air)	T(réfrigérateur)	T(théorique)	Masque
6,9	-2°C	-8,9°C	-9°C	faible
7,6	3,4°C	-4,2°C	-4,1°C	faible
6,4	6,2°C	-0,2°C	-1,6°C	moyen
6,2	7,7°C	1,5°C	-0,3°C	moyen

On note immédiatement l'effet de masque sur le résultat final. Un masque moyen provoque un écart de 20% entre les résultats observés et ceux prédits par la théorie (l'écart étant tel que le réfrigérateur ne refroidit pas assez).

REMARQUE. Les températures indiquées sont les températures minimales obtenues la nuit.

**(9.2) CINÉTIQUE :** Avec le même dispositif et une plaque épaisse d'environ 1/3 de millimètre, le temps pour obtenir une température constante (la température limite en théorie) est de l'ordre de 15 minutes.

REMARQUE. Pour faire concorder la théorie et la pratique sur la cinétique à vide du réfrigérateur il est indispensable de considérer un coefficient mesuré expérimentalement — que nous appellerons  $C_e$ . Dans l'équation (4), le terme  $e \rho C_p$  devient pour plusieurs matériaux  $\sum_i e_i \rho_i C_{pi}$ . Or il apparaît que dans ce cas la pratique ne concorde pas avec la théorie : en effet, la plaque se refroidit car elle constitue le corps noir, mais l'air alentour par exemple ne sera refroidi que par convection, donc beaucoup plus lentement que si les transferts étaient instantanés. Le coefficient  $C_e$  sera donc ce coefficient d'échange qui est une caractéristique de la cinétique entre la plaque et le matériau considéré. En ce qui concerne l'air, en supposant que l'air se refroidira sur un volume restreint autour de la plaque, on trouve  $C_e^{air} = 400$ .

**(9.3) RÉFRIGÉRATEUR GIGOGNE :** En plus de ce module réfrigérant, disposons sur le fond un autre module de ce genre (plus petit de 60% environ). Les résultats théoriques ne sont en aucun cas confirmés par les résultats expérimentaux, et ce pour 2 raisons :

- le fait de placer un module dans un autre empêche ce dernier de rayonner sur la surface couverte : on observe expérimentalement, ici, une erreur de 30% entre la température observée et attendue dans le 1<sup>er</sup> réfrigérateur — due majoritairement à cet effet.
- par ailleurs, cette différence de 30% se répercutera automatiquement en une erreur au moins égale pour la température attendue dans le second réfrigérateur. En effet, on observe 40% d'écart environ.

Mais ça n'est pas tout : l'erreur observée dans le second réfrigérateur possède une autre origine. La théorie considère en effet que la température est uniforme dans les réceptacles ; or, il est facile de voir qu'il n'en sera pas question ici — la température se devant d'être continue, croît de T(réfrigérateur) à T(air) lorsque l'on monte dans le réfrigérateur. Seule une partie du second réfrigérateur baigne dans de l'air à température proche de la théorie, le reste non.

Ainsi, en prenant en compte une fonction spatiale de la température, ainsi qu'une fonction de pondération — car certaines parties du second réfrigérateur sont plus sensibles que d'autres à une différence de température — on arrive à vérifier la pratique, à la condition d'admettre la température dans le 1<sup>er</sup> réfrigérateur, car la théorie n'est pas prévue pour un recouvrement partiel de la plaque rayonnante — mais elle pourrait l'être.

	Température relevée	Température théorique	Ecart
T(air)	11,1°C	NC	NC
T(1 <sup>er</sup> réfrigérateur)	5,1°C	2,8°C	28%
T(2 <sup>e</sup> réfrigérateur)	-0,2°C	-7,2°C	38%

REMARQUE. Ces résultats — assez mauvais — ont été obtenus pour un masque faible ! Voici ceux obtenus pour un masque moyen :

	Température relevée	Température théorique	Ecart
T(air)	8,7°C	NC	NC
T(1 <sup>er</sup> réfrigérateur)	3,9°C	0,6°C	41%
T(2 <sup>e</sup> réfrigérateur)	1,6°C	-9,2°C	58%

REMARQUE. Les écarts en pourcentages sont calculés sur la base des erreurs entre températures observées et températures théoriques **pour la température extérieure considérée**. Ainsi lorsque l'on calcule l'écart du 2<sup>e</sup>réfrigérateur par rapport à la théorie, c'est par rapport à l'écart que la théorie prévoit pour la température théorique obtenue dans le 1<sup>er</sup>réfrigérateur — et non l'écart avec la température théorique du 2<sup>e</sup>réfrigérateur obtenue en utilisant la température expérimentale du 1<sup>er</sup>réfrigérateur.

REMARQUE. Les résultats en cas de masque moyen sont encore pires!

**(9.4) REVENONS SUR LA FONCTION T.** Donnons-nous un moyen qui permettra de déterminer pratiquement la température limite obtenue. On sait que cette fonction  $T(air) \rightarrow T$  est croissante et que la fonction écart  $T(air) \rightarrow T(air) - T$  l'est également.

Donnons-nous deux températures  $T_1$  et  $T_2$  que l'on supposera telles que  $T_1 < T_2$ . On peut mesurer expérimentalement les températures limites  $T_1^F$  et  $T_2^F$  associées, ou les calculer grâce à la théorie.

Pour toute température  $T$  comprise entre  $T_1$  et  $T_2$ , on a —  $T^F$  étant la température limite associée,

$$T_2^F - T_2 + T < T^F = T - \delta(T) < T_1^F - T_1 + T \quad (16)$$

en effet, partant de  $T$ , l'écart autour de cette température est majoré par celui obtenu pour une température supérieure, soit  $T_2$ ; inversement, une minoration de l'écart est obtenue par une température inférieure. (C'est la croissance de la fonction  $\delta = T(air) - T$  qui permet ces affirmations).

APPLICATION. En appliquant cette méthode aux valeurs théoriques de la partie précédente, en prenant les températures extrêmes comme guides, on obtient

T(extérieure)	T(théorique)	Minoration	Majoration	Moyenne
3,4°C	-4,1°C	-4,6°C	-3,6°C	-4,1°C
6,2°C	-1,6°C	-1,8°C	-0,8°C	-1,3°C

REMARQUE. On s'aperçoit tout de suite que l'approximation par la moyenne est excellente lorsque  $T$  est vers le milieu du segment  $[T_1, T_2]$ . D'où le paragraphe qui suit :

**(9.5) UNE PONDÉRATION.** Lorsque la température est loin des deux valeurs guides, l'approximation par une moyenne sans coefficients — à coefficients égaux plutôt — est plutôt bonne. A l'opposé, lorsque l'on se rapproche d'une température guide, on s'aperçoit que la moyenne est éloignée de la réalité.

Cherchons à pondérer les valeurs d'encadrement de telle sorte que la pondération soit symétrique par rapport au milieu du segment  $[T_1, T_2]$  — de façon à garantir une moyenne « sans pondération » dans cette zone — et qu'elle annule l'effet d'une température guide lorsque l'on est proche de l'autre.

Considérons les deux coefficients suivants :

$$\alpha = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} \quad \beta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (17)$$

Le coefficient  $\alpha$  privilégie bien évidemment les températures proches de  $T_1$  et  $\beta$  celles proches de  $T_2$ . Leur somme fait 1.

On considèrera donc la moyenne

$$T_{moy} = \alpha(T_1^F - T_1 + T) + \beta(T_2^F - T_2 + T) \quad (18)$$

ou enfin,

$$T_{moy} = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}(T_1^F - T_1 + T) + \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}(T_2^F - T_2 + T) \quad (19)$$

APPLICATION. Appliquons cette nouvelle moyenne aux résultats précédents.

T(extérieure)	T(théorique)	Moyenne classique	Moyenne améliorée
3,4°C	-4,1°C	-4,1°C	-4,1°C
6,2°C	-1,6°C	-1,3°C	-1,6°C

REMARQUE. Les résultats sont proches de ce que la théorie prévoyait — ou la pratique, car après tout, il suffit d'utiliser les valeurs expérimentales comme valeurs guides.

REMARQUE. Il est intéressant de poser  $T_1 = 0$ , ainsi  $T_1^F = 0$ ; pour retrouver une approximation de la fonction  $T$  pour les basses températures. On retrouve notamment un équivalent en 0 de la forme

$$T(x) = \frac{T_2^F}{T_2}x,$$

et à ces températures cette fonction est équivalente à  $x$ , ce qui confirme le résultat déjà vu plus haut (paragraphe (5.4)).

REMARQUE. L'avantage de cette fonction pour trouver la température admissible — outre le fait qu'elle soit plus légère que les approximations précédentes, et qu'elle soit tout de même précise — c'est qu'on peut l'utiliser indifféremment avec des degrés Celsius ou des Kelvin, vu que l'on utilise uniquement des écarts de températures.

Traçons une courbe pour les températures usuelles (-20°C à 50°C).

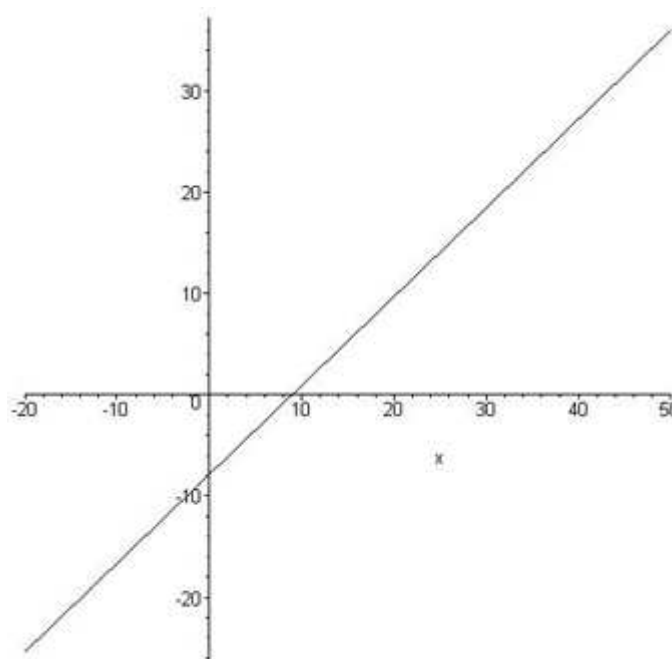


FIGURE 11 - Températures admissibles aux températures usuelles

REMARQUE. Il s'agit en fait d'une linéarisation entre deux températures, car la pondération choisie — arbitrairement — est linéaire, il faudrait en réalité en chercher une plus naturelle.

REMARQUE. La courbe cherchée étant concave, on y gagnerait à l'approximer à un polynôme de degré 2, en connaissant donc trois températures guides.

CONDITIONS NÉCESSAIRES. Résumons les conditions imposées aux coefficients; conditions vérifiées par la pondération précédente, mais elle n'est pas privilégiée naturellement :

$$\alpha\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) = \beta\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) \quad (20)$$

$$\alpha(T_1) = 1 \quad \alpha(T_2) = 0 \quad (21)$$

$$\beta(T_1) = 0 \quad \beta(T_2) = 1 \quad (22)$$

**(9.6) DIFFÉRENTES PLAQUES RAYONNANTES.** Les résultats précédents ont été obtenus la nuit avec un corps noir intégral — du noir de fumée — mais il est possible d'utiliser d'autres plaques rayonnantes, jouant le rôle de corps noir sélectif; les rayons solaires dans le domaine visible seraient réfléchis si l'on prend un corps blanc.

Essayons différentes plaques et comparons les résultats obtenus la nuit et la journée par rapport au corps noir intégral de référence — ici le noir de fumée.

Corps utilisé	T(nuit)	T(noir de fumée)	T(corps)	Rapport	Journée
Sans corps	17,8°C	15°C	18,1°C	<0%	chauffe
Alu + plâtre	17,5°C	15,1°C	15,6°C	79%	chauffe
Alu + eau	12,1°C	8,7°C	10,2°C	56%	chauffe
Miroir ou verre	14,5°C	9,9°C	11,9°C	57%	NC

On constate donc que les corps noir sélectifs testés ci-haut fonctionnent — moins bien que le noir de fumée — mais qu'ils sont inutilisables en journée.

Il faut donc abandonner l'idée de vouloir utiliser le réfrigérateur par rayonnement en pleine journée, en plein soleil. Mais quelques solutions existent, et sont exposées dans la partie suivante.

## (10) Des solutions<sup>2</sup>

**(10.1) LA SOLUTION RUDIMENTAIRE :** puisque le réfrigérateur ne fonctionne que la nuit, l'idée la plus simple est de le sortir la nuit et de le rentrer la journée. Or, une fois placé dans l'habitation le contenu va se réchauffer trop rapidement, à moins que l'on y ait placé des réserves de «frigories»<sup>3</sup> comme par exemple de l'eau. Mais dans ce cas, il est bien plus «commode» de disposer définitivement le réfrigérateur à l'extérieur et de l'alimenter le soir en eau à température ambiante et de fournir une glacière en eau froide le matin. On peut même rendre ce procédé moins rudimentaire en l'automatisant; par exemple en disposant le réfrigérateur non loin de la glacière et en faisant circuler un fluide — de l'eau par exemple — entre les deux, uniquement lorsqu'il refroidit.

**(10.2) UNE SOLUTION TOUT AUSSI SIMPLE :** Puisque c'est le soleil qui gêne, essayons de n'utiliser le dispositif qu'en son absence, c'est-à-dire à l'ombre. Plusieurs cas sont possibles :

– ceux qui résident sur l'ubac<sup>4</sup> pourront disposer de leur réfrigérateur librement puisque le soleil ne l'atteindra pas.

<sup>2</sup>liste non exhaustive ...

<sup>3</sup>par opposition aux calories.

<sup>4</sup>côté d'une colline exposée au Nord (et donc non ensoleillée).

- ceux qui habitent dans l’hémisphère Nord et éloignés de l’équateur<sup>5</sup> : il suffit simplement de pencher le réfrigérateur vers le Nord — mais pas trop pour éviter les rayonnements parasites — ou bien alors d’élever une paroi protectrice entre le réfrigérateur et le soleil, inclinée de façon à ne pas favoriser les entrées de rayonnement de l’environnement dans le réfrigérateur.
- ceux qui se trouvent au niveau de l’équateur tâcheront de trouver une dune ou tout autre monticule qui possèdera une face plus ou moins protégée du soleil.
- enfin, pour ceux qui habitent en ville, ce genre de solution ne peut s’appliquer.

**(10.3) L’OMBRE ARTIFICIELLE** : Le mieux reste encore de disposer d’un réfrigérateur bien isolé de façon à ce que le matin — et cette tâche peut être automatisée — l’abaissement d’un panneau en bois isolé sur le haut du couvercle empêche toute entrée de soleil et surtout constitue une isolation indispensable à ce niveau du dispositif. Les valeurs d’isolation à donner au dispositif étant fonctions (1) de la température souhaitée la nuit (2) de l’autonomie du dispositif et donc de la température en fin de journée.

**(10.4) UNE REMARQUE** : Dans tout ce qui précède, il n’a nullement été signalé que le réfrigérateur devait être placé à l’extérieur — mais pourtant c’est le cas : à l’intérieur il rayonnerait certes mais le plafond aussi et donc «rien ne bougerait». Tout cela nous permet donc uniquement de constituer un réfrigérateur extérieur ce qui n’est pas très pratique : cependant, vu le coût de réalisation, ce dispositif est très rentable ; par ailleurs il est tout à fait possible de l’intégrer à une nouvelle habitation, en prenant en compte qu’un accès au toit est indispensable pour son bon fonctionnement. L’intérêt de ce genre de refroidissement reste donc limité aux usages ponctuels (camping par exemple) et/ou en cas de besoin de matériel de refroidissement peu cher (missions humanitaires par exemple).

**(10.5) EXPLOITATION D’UN PHÉNOMÈNE PHYSIQUE** : L’idée suivante pourrait également être réalisée, et combinée aux précédentes pour fournir de bons résultats.

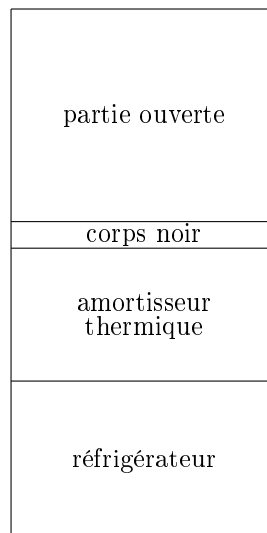


FIGURE 12 - Isolation partielle

Ainsi, le matin, alors que le réfrigérateur est refroidi, le levée du soleil entraîne la montée en température de la plaque rayonnante. La chaleur va peu à peu progresser dans l’amortisseur thermique mais pas suffisamment pour atteindre le réfrigérateur. Au final, la chaleur captée la journée sera stockée dans cette couche protectrice et la température dans le réfrigérateur aura à peine augmenté — notamment à cause des pertes thermiques du réfrigérateur lui-même, mais également à cause de la progression de la chaleur qui ne se fait pas «en bloc».

Cette technique n’apporte rien d’avantageux par rapport à celle qui consiste à recouvrir le réfrigérateur la journée puisque l’on ne refroidit pas plus, mais surtout il y a un léger échauffement. L’avantage est seulement le fait que l’on évite d’abaisser la protection ce qui nécessite de l’énergie.

---

<sup>5</sup>on appelle ici équateur l’endroit où le soleil est au maximum dans le ciel.



La nuit par contre, la plaque étant à une température supérieure à celle de l'air, elle va rayonner beaucoup plus et donc toute la chaleur qui aura été stockée sera rayonnée rapidement. Une fois l'excédent rayonné, le refroidissement du réfrigérateur commencera jusqu'à atteindre la température voulue. Tous calculs faits, une fois cette opération terminée, le jour pourra se lever.

On joue donc ici sur le fait que la plaque rayonnera beaucoup plus si elle est plus chaude ; ainsi la chaleur stockée ne sera pas une gêne lors du refroidissement la nuit, il faudra cependant un peu plus de temps pour refroidir par rapport au réfrigérateur couvert la journée. Le seul avantage réside dans l'entière autonomie énergétique du système.

ENCORE UNE AMÉLIORATION. Pour améliorer encore plus le système, il est intéressant d'éviter que la plaque rayonnante ne chauffe trop. Pour cela il peut être intéressant de percer de trous le plastique posé sur la partie supérieure : l'air chaud pourra ainsi s'évacuer plus rapidement et l'on fera ainsi baisser légèrement la température de la plaque. A l'opposé, si les trous ne sont pas trop gros, cela ne sera aucunement une gêne lors du refroidissement la nuit ; en effet, l'air froid étant plus dense, il s'accumulera au fond du réfrigérateur et ne s'évacuera pas. La protection plastique est juste là pour éviter que le vent ne chasse l'air froid ; ainsi des trous de taille raisonnable permettront à l'air chaud de partir la journée, mais la nuit stopperont le vent extérieur, pour une bonne part.